Propriétés des nombres réels.

- Structure de corps commutatif :

$\mathbb{R}$ est muni de deux opérations binaires :

la somme $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x+y$ et le produit $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$

Propriétés de la somme :

- $(x+y)+z = x+(y+z) =: x+y+z$ (associativité)
- $x+y = y+x$ (commutativité)
- $\exists 0 : x+0 = x \ \forall x$. ($\exists$ élém neutre pour $+$)
- $\forall x \ \exists y : x+y=0$ ($y := -x$) $\exists$ inverse pour $+$)

Propriétés du produit :

- $(xy)z = x(yz) =: xyz$ (associativité)
- $xy = yx$ (commutativité)
- $\exists 1 : x \cdot 1 = x \ \forall x$ ($\exists$ élém neutre pour $\cdot$)
- $\forall x \neq 0 \ \exists y : xy = 1$ ($\exists$ réciproque), $y =: \frac{1}{x}$).

Distributivité : $x(y+z) = xy + xz$

Les opérations font de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un "<u>corps commutatif</u>".

Ordre :

Déf : Soit E un ensemble. Un <u>ordre</u> dans E est une relation $\leq$ telle que :

i) $x \leq x \quad \forall x \in E$

ii) si $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$.

iii) si $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitivité)

Un ordre est dit total si :

iv) $\forall x, y$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemple : ordre standard dans $\mathbb{R}$.

Ordre partiel pas total : ~~ordre total~~ dans $\mathbb{R}^2$, on dit que $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$. On a que $(3,1) \not\leq (1,2)$ et $(1,2) \not\leq (2,1)$.

Dans les ordres totals, on peut toujours dire si on a 2 élément, lequel est le plus petit.

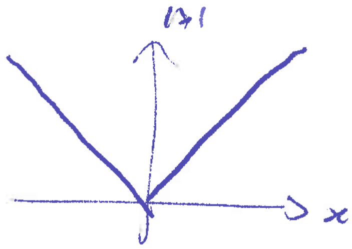
L'ordre standard dans les réels satisfait deux propriétés adjointes :

(A) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ (compatibilité avec $+$)

(M) $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$ ($\forall a>0$), on a $x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$ (compatibilité avec $\cdot$)

Un corps ~~total~~ avec un ordre total $\leq$ satisfaisant A, M est dit "**corps ordonné**".

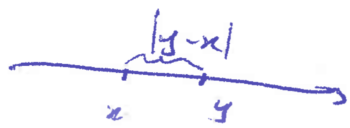
Valeur absolue



Définition : La valeur absolue d'un nombre réel est :

$|x| = \max\{x, -x\}$ (le plus grand entre x et $-x$).

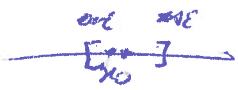
La distance entre x et y est $d(x,y) = |y-x|$.



Propriétés :

i) $|xy| = |x||y|$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon$. ($\Leftrightarrow d(x,0) \leq \varepsilon$)



iii) (inégalité triangulaire) $|x+y| \leq |x|+|y|$

Intervalles : pour $a \leq b \in \mathbb{R}$:

bornés : ouvert $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a<x<b\}$

fermé $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

mixtes $[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a,b] := \{ \;\text{"}\; \mid a < x \leq b\}$.

infinis : ouverts : $]a;+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$]-\infty; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

fermés $[a;+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$]-\infty; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

$\mathbb{R}$: $]-\infty;+\infty[:= \mathbb{R}$.

Remarques : - $[a,a] = \{a\}$, $[a,a[=]a,a] =]a;a[= \emptyset$.

$\forall \varepsilon > 0$

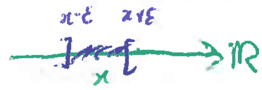
- $[a-\varepsilon ; a+\varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq \varepsilon\}$

$]a-\varepsilon ; a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$.

Voisinages.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $V \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble. V est dit :

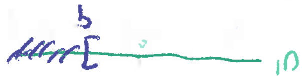
- <u>voisinage</u> de x si $\exists \varepsilon > 0$: $]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\subseteq V$.



($]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[$ est dit voisinage ~~épointé de~~ x, ou centré en x)

- voisinage de $+\infty$ si $\exists a \in \mathbb{R}$: $]a,+\infty[\subseteq V$

" $-\infty$ si $\exists b \in \mathbb{R}$: $]-\infty; b[\subseteq V$



- voisinage à gauche de x si $\exists \varepsilon > 0$: $]x-\varepsilon ; x] \subseteq V$

- voisinage à droite de x si $\exists \varepsilon > 0$: $[x ; x+\varepsilon[\subseteq V$.

voisinage épointé de x = $V \setminus \{x\}$ avec V voisinage.

~~Exemple~~ Exemple

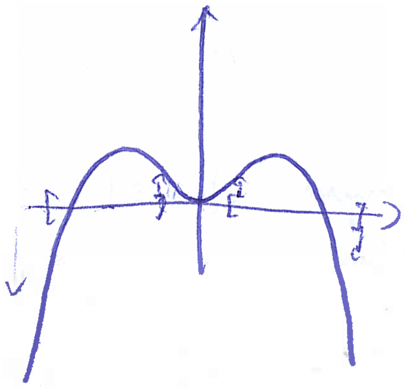
1) L'intervalle $V = [0,1[$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$ et un voisinage droit de 0. Il n'est pas un voisinage gauche de 1 (car $1 \notin V$)

2) L'ensemble $V =]-\infty; \pi] \cup \{5\}$ est un voisinage de $-\infty$, un voisinage gauche de π. Il n'est pas un voisinage (ni droit, ni gauche) de 5.

Rmq : Un voisinage de x est à la fois un voisinage droit et gauche de x.

Notation : On dit que "une proposition P qui dépend de $x \in \mathbb{R}$ est vraie "dans un voisinage de x_0" (ou "au voisinage de x_0") si $\exists$ V voisinage de x_0 t.q. $P(x)$ est vraie pour tout $x \in V$.

Exemple : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) := x^2(1-x^2)$ est positive dans un voisinage de 0, et négative dans un voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



Majorant / Minorant, borne supérieure / inférieure.

Définition : Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble des réels.
Un élément M est un majorant de E si $x \le M$ $\forall x \in E$.
Le plus petit des majorants (s'il existe il est forcément unique car l'ordre est total) s'appelle la borne supérieure de E (dans $\mathbb{R}$), et notée $\sup E$. ou $\sup\limits_{x \in E} x$
Si $\sup E \in E$, la borne supérieure s'appelle le maximum de E, noté $\max E$ ou $\max\limits_{x \in E} x$.

De façon analogue un élément m est un minorant de E si $x \ge m$ $\forall x \in E$
Le plus grand des minorants (s'il existe) s'appelle la borne inférieure de E dans $\mathbb{R}$, et notée $\inf E$ ou $\inf\limits_{x \in E} x$.
Si $\inf E \in E$, la borne inférieure s'appelle le minimum de E, noté $\min E$ ou $\min\limits_{x \in E} x$.

Exemple : $E = [0,1[$. Alors $\inf E = \min E = 0$, $\sup E = 1$, mais E n'admet pas de max.

Remarque: Une façon analogue de donner la définition précédente est la suivante:

$M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de $E \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si:

i) $\forall x \in E \Rightarrow x \leq M$ (M est un majorant)

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$: $M - \varepsilon \overset{(\leq)}{<} x$ ($M - \varepsilon$ n'est pas majorant $\forall \varepsilon > 0$, c-à-d, M est le plus petit majorant.)

De même façon

$m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de $E \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si:

i) $\forall x \in E \Rightarrow x \geq m$ (m est un minorant)

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$: $x \overset{(\leq)}{<} m + \varepsilon$. ($m$ est le plus grand minorant)

Complétude de $\mathbb{R}$

Les propriétés d'ordre données jusqu'à ici sont satisfaites par les réels mais par les rationnels aussi.

Pour distinguer les deux cas, on impose que $\mathbb{R}$ satisfait la propriété suivante:

(C) Propriété de la borne supérieure.

Toute sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure. Tout sous-ensemble non vide et minoré admet une borne inférieure.

À partir de (C), on déduit que "$\mathbb{R}$ est complet":

Toute ~~suite~~ suite de Cauchy est convergente. (à voir la partie d'analyse)

Par ces propriétés, on peut déduire la propriété archimédienne des réels.

~~Proposition $\forall x > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$.~~

Proposition. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

Supposons par absurde que $\exists M \in \mathbb{R}$ tq. $n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

par la propriété (C), $\exists\ M_0 = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Comme M_0 est une borne supérieure (le plus petit majorant), $M_0 - 1 < M_0$ n'est pas un majorant, et $\exists\ n \in \mathbb{N}$: $M_0 - 1 < n$.

Mais alors $M_0 < n+1 \in \mathbb{N}$, et M_0 n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$, absurde □

Corollaire (Propriété archimédienne) : $\forall x>0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ t.q. $nx > y$.

Preuve : Comme $\mathbb{N}$ n'est pas borné, $\exists\ n \in \mathbb{N}$: $n > \frac{y}{x}$, d'où $nx > y$ □

Remarque : les nombres réels sont caractérisés comme les éléments d'un corps ordonné $(K, +, \cdot, \leq)$ qui satisfait (A) (M) (C) (à isomorphisme près).
[$K \supseteq \mathbb{N}$ car K satisfait la propriété archimédienne]

Les nombres rationnels dans les nombres réels.

On a déjà vu les ~~[illegible]~~ inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

De plus $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ car $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ car $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ car $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On veut montrer maintenant (fondamental) que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

On va montrer que ~~[illegible]~~ $\nexists\ r \in \mathbb{Q}$ t.q. $r^2 = 2$.

Après on va montrer que $\exists\ x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 = 2$ (qu'on notera $\sqrt{2}$)

Proposition : $\nexists\ r \in \mathbb{Q}$ tel que $r^2 = 2$.

Preuve : Supposons par absurde que $\exists\ r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.q. $r^2 = 2$.

C10 - (7)

On choisit p et q premiers entre eux (pas de facteurs communs)

On a donc $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$.

Donc p^2 est pair $\Rightarrow p$ est pair (si p est impair $p = 2n+1 \to p^2 = \underbrace{4n^2+4n}_{\text{pair}}+1$)

Comme p et q n'ont pas de facteurs communs, q est impair.

Comme ~~p~~ p est pair, on peut écrire $p = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{4n^2}{q^2} \to q^2 = 2n^2$ Donc q^2 est pair et q est pair

Contradiction.

$\square$

Proposition : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$.

~~Preuve~~ : Soit $E = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \text{ et } y^2 < 2\}$.

$E \neq \emptyset$ $(1 \in E)$ et E est majoré (par 2)

Par la propriété (C), $\exists x = \sup E$.

On veut montrer que $x^2 = 2$ en écartant $x^2 < 2$ et $x^2 > 2$.

Supposons par absurde que $x^2 < 2$. On va trouver $x + \frac{1}{n} \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$,

en contredisant le fait que $x = \sup E$.

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} = x^2 + \frac{1}{n}\left(2x + \frac{1}{n}\right) \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x+1).$$

$\left(\frac{1}{n} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

On applique la

~~Par la~~ propriété archimédienne, ~~$\exists n \in \mathbb{N} : n(x^2-2) > 2x+1$~~

à $\frac{2-x^2}{\cancel{2}} > 0$ et $2x+1$: $\exists n \in \mathbb{N} : n(2-x^2) > 2x+1$

~~Contradiction~~ Donc

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x+1) < x^2 + (2-x^2) = 2.$$ Donc $x + \frac{1}{n} \in E$: contradiction.

Supposons que $x^2 > 2$.

On trouvera $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x - \frac{1}{n}$ est encore un majorant de E, en contradiction avec $x = \sup E$.

Notons que $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > x^2 - \frac{2x}{n}$.

On applique la propriété archimédienne à $x^2 - 2 > 0$ et $2x$:

$\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n(x^2-2) > 2x$.

Pour un tel n, $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 > x^2 - \frac{2x}{n} > x^2 - (x^2 - 2) = 2$

Comme $y \mapsto y^2$ ($[0,\infty[\to [0,+\infty[$) est croissante, on en déduit que $x - \frac{1}{n} \geq y$ $\forall y \in E$, contradiction.

□

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition : Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}$ si

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x<y, \ \exists r \in E : x < r < y$

De façon analogue : $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert non vide, $\exists r \in E \cap I$.

Exemple : $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$: dans $]0,1[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

Proposition : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve : Montrons que $\forall x < y \in \mathbb{R}$ $\exists r \in \mathbb{Q}$ tq $x < r < y$.

~~Sans perte de généralité, on peut supposer $x > 0$.~~

Par la propriété archimédienne $\exists n \in \mathbb{N} : n(y-x) > 1 \leftrightarrow ny - nx > 1$.

Soit $S = \{n' \in \mathbb{N} : nx < n'\}$. $S \neq \emptyset$, car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Soit $m = \min S$. $\Rightarrow m-1 \notin S$, et on a $(m-1) \leq nx$ et $nx < m$.

De plus $m - 1 \leq nx < ny - 1 \to m < ny$.

~~On~~

C10 - 9

Donc $nx < m < ny$, d'où $x < \frac{m}{n} < y$ $\square$

Proposition $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve Pour tout $x<y$, on trouve $s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tq $x<s<y$

Par la proposition précédente, $\exists r \in \mathbb{Q}$: $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow x < r\sqrt{2} < y$

$r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: si $r\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{qr}$ est rationnel : absurde.

Donc $r\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est l'irrationnel ~~...~~ cherché. $\square$